Universidad popular del cesar
Departamento de matemática y estadística
Algebra lineal
Rectas en el espacio

Nota:

Sean: $r: \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ y $s: \frac{x-x_2}{a'} = \frac{y-y_2}{b'} = \frac{z-z_2}{c'}$ dos rectas cualesquiera en el espacio entonces:

a. **El ángulo de dos rectas que se cortan es el menor de los ángulos que forman sus vectores direccionales.**
b. **El ángulo de dos rectas que se cruzan es el ángulo formado por dos rectas secantes paralelas a las dadas.**

$$Cos(r,s) = Cos(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s}{|\vec{u}_r||\vec{u}_s|} = \frac{|a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

c. Condición de perpendicularidad.

$$r \perp s \iff \vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = 0 \text{ es decir } \vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c'$$

d. Condición de paralelismo:

$$r \parallel s \iff \vec{u}_r \text{ proporcional a } \vec{u}_s, \text{es decir } = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Ejemplo 1:

Determine la ecuación de la recta, la ecuación paramétrica, simétrica (continuas) e implícita que pasa por el punto $P(1,2,-3)$ y que tiene dirección $\vec{d} = (5,7,-4)$.

Ecuación Vectorial:

$$(x,y,z) = (1,2,-3) + t \cdot (5,7,-4)$$

Ecuaciones paramétricas.

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 + 7t \\ z = -3 - 4t \end{cases}$$

Ecuaciones continuas o simétricas.

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{7} = \frac{z+3}{-4}$$

Ecuaciones implícitas (ojo relacionamos x con y; y x con z, solamente).

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{7} \quad \Rightarrow \quad 7x - 7 = 5y - 10 \quad \Rightarrow \quad 7x - 5y + 3 = 0$$

$$\frac{x-1}{5} = \frac{z+3}{-4} \quad \Rightarrow \quad -4x + 4 = 5z + 15 \quad \Rightarrow \quad -4x - 5z - 11 = 0$$

Por tanto las ecuaciones implícitas son:

$$\begin{cases} 7x - 5y + 3 = 0 \\ -4x - 5z - 11 = 0 \end{cases}$$

Nota: Desarrollar los ejercicios como trabajo escrito para entregar el próximo viernes 31 de marzo, hora 4:00 pm. Estos ejercicios los pueden trabajar en grupo de dos integrantes. Cualquier duda hacérmela llegar lo antes posible.

1. Comprueba si los puntos $A(-3, 1\ 3), B(3, 1, 5)\ y\ C(1, -1, 2)$ pertenecen o no a la recta que pasa por $P(-1, 1, -1)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-2, 0, -3)$. Calcula dos puntos más de esta recta.
2. Hallar las ecuaciones paramétricas, en forma continua e implícita de la recta que pasa por los puntos:
   a. $A(1, 0, 1)\ y\ B(0, 1, 1)$.
   b. $D(-5, 3, 7)\ y\ E(2, -3, 3)$
3. Halla las ecuaciones implícitas de las rectas sobre las que descansan los lados del triángulo de vértices $A(1, -1, 1), B(0, 1, 2)\ y\ C(1, 2, -3)$.
4. Estudia las posiciones relativas de los pares de rectas que aparecen en estos apartados. Cuando se corten, calcula el punto en que lo hacen, haya el ángulo entre ellas.
   a. $\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + 3t \\ z = t - 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - k \\ z = 5 \end{cases}$
   b. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t + 1 \\ z = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -6k - 1 \\ y = 3 + 3k \\ z = 5 \end{cases}$
5. Estudia las posiciones relativas de los pares de rectas que aparecen en estos apartados. Cuando se corten, calcula el punto en que lo hacen, halla el ángulo entre ellas:
   a. $\ell_1: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ $\ell_2: \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = k \end{cases}$
   b. $\ell_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -t - 2 \\ z = 1 + 0t \end{cases}$ $\ell_2: \begin{cases} x = -2k \\ y = 3 + 3k \\ z = -1 \end{cases}$
6. Dadas las rectas $\ell_1\ y\ \ell_2$ representadas por las ecuaciones:

$$\ell_{1:}\ \frac{3x-9}{6} = \frac{4-y}{5} = \frac{z-4}{-1}; \quad y \quad \ell_2: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

   Halla:
   a. La posición relativa de estas rectas.
   b. Si estas rectas se cortan, halla su punto de corte y el ángulo entre ellas.

"Empieza haciendo lo necesario, después lo posible, y de repente te encontrarás haciendo lo imposible." - San Francisco de Asís

Germán Isaac sosa Montenegro
Marzo 25 de 2017.